ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
—————o0o—————

TRIỆU VIỆT THỊNH

MA TRẬN ĐỐI XỨNG LỆCH VÀ GIÁ TRỊ RIÊNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

o0o

TRIỆU VIỆT THỊNH

MA TRẬN ĐỐI XỨNG LỆCH VÀ GIÁ TRỊ RIÊNG

Chuyên ngành: Giải Tích
Mã số: 8 46 01 02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. HỒ MINH TOÀN

THÁI NGUYÊN - 2020

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu khoa học độc lập của riêng bản thân tôi dưới sự hướng dẫn khoa học của **TS. Hồ Minh Toàn**. Các nội dung nghiên cứu, kết quả trong luận văn này là trung thực, không sao chép của bất cứ ai và chưa từng công bố dưới bất kỳ hình thức nào trước đây.

Ngoài ra, trong luận văn tôi có sử dụng tài liệu, thông tin được đăng tải trên các tạp trí và một số kết quả của các tác giả khác đều có trích dẫn và chú thích nguồn gốc. Nếu phát hiện bất kỳ sự gian lận nào tôi xin chịu trách nhiệm về nội dung luận văn của mình.

Thái Nguyên, ngày 15 tháng 06 năm 2020
Tác giả

Triệu Việt Thịnh

Xác nhận
của khoa chuyên môn

Xác nhận
của người hướng dẫn

TS. Hồ Minh Toàn

Lời cảm ơn

Trong quá trình học tập và nghiên cứu để hoàn thành luận văn tôi đã nhận được sự giúp sức và hướng dẫn chỉ bảo nhiệt tình của người hướng dẫn khoa học, **TS. Hồ Minh Toàn**.

Ngoài ra, trong quá trình học tập và làm luận văn, từ các bài giảng của các Giáo sư, Phó Giáo sư đang công tác tại Viện Toán học, các Thầy Cô trong Trường Đại học Sư Phạm Thái Nguyên, tôi đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức, kỹ năng phục vụ cho việc nghiên cứu và công tác của bản thân. Từ đáy lòng mình, tôi xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các Thầy Cô.

Tôi cũng muốn gửi lời cảm ơn bộ môn Giải tích, Khoa Toán Trường Đại Học Sư Phạm Thái Nguyên, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, hướng dẫn, phản biện để tôi có thể hoàn thành tốt luận văn này. Do thời gian có hạn, bản thân tôi còn hạn chế nên luận văn có thể có những thiếu sót. Tôi mong muốn nhận được ý kiến phản hồi, đóng góp và xây dựng của các thầy cô, và các bạn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 15 tháng 06 năm 2020

Tác giả

Triệu Việt Thịnh

Mục lục

Danh mục các ký hiệu, các chữ viết tắt

$\mathbb{R}^{2n}$	không gian véctơ $2n-$ chiều
$E_1 \oplus E_2$	tổng trực tiếp của hai không gian véc tơ
$\dim A$	số chiều của không gian A
$\emptyset$	tập rỗng
$\det A$	định thức của ma trận A
A^T	ma trận chuyển vị của A
$\mathrm{Sp}(n)$	tập tất cả các ma trận symplectic cấp $2n$
$\mathrm{Pf}(A)$	đa thức Pfaffian của ma trận A
$\mathrm{U}(n)$	tập tất cả các ma trận unita cấp n
$\mathrm{Spec}_\sigma(M)$	phổ symplectic của M
$\|\| \cdot \|\|$	chuẩn toán tử thông thường
$\|\|\| \cdot \|\|\|$	chuẩn bất biến unita
$\square$	kết thúc chứng minh

Lời mở đầu

Ngày nay, tầm quan trọng của lý thuyết ma trận được biết đến rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Có thể thấy ứng dụng của lý thuyết ma trận trong hầu hết các lĩnh vực khoa học. Trong vật lý, bao gồm quang học, điện từ học, cơ học lượng tử, cơ học cổ điển và điện động lực học lượng tử, chúng được sử dụng để nghiên cứu các hiện tượng vật lý, như chuyển động của vật rắn và nghiên cứu các quỹ đạo tuần hoàn Hamilton. Trong kỹ thuật đồ họa máy tính ma trận được sử dụng để chiếu một ảnh 3 chiều lên màn hình 2 chiều. Trong lý thuyết xác suất và thống kê, các ma trận ngẫu nhiên được sử dụng để miêu tả tập hợp. Lý thuyết ma trận giúp tìm nghiệm của các hệ phương trình tuyến tính. Trong giải tích số ma trận được dùng để phát triển các thuật toán hữu hiệu cho các tính toán ma trận, phương pháp khai triển ma trận làm đơn giản hóa các tính toán cả về mặt lý thuyết lẫn thực hành. Những thuật toán dựa trên những cấu trúc của các ma trận đặc biệt, như ma trận sparse và ma trận chéo, giúp giải quyết những bài toán phức tạp và những tính toán khác. Phép tính ma trận tổng quát hóa các khái niệm trong giải tích như đạo hàm và hàm mũ đối với số chiều lớn hơn. Đặc biệt, giải tích ma trận trở thành một chủ đề độc lập trong toán học bởi một số lượng lớn các ứng dụng của nó. Một trong các công cụ chính trong giải tích ma trận là định lý chéo hóa Williamson và một số kết quả về giá trị riêng.

Trong toán học, giải tích ma trận nghiên cứu về các cấu trúc tô-pô trên ma trận, hàm ma trận và các bất đẳng thức toán tử. Chính vì một số lượng lớn các ứng dụng của lý thuyết ma trận mà các chủ đề của giải tích ma trận luôn được chọn làm các đề tài nghiên cứu khoa học. Trong luận văn này chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian véc tơ đối xứng lệch, tiếp theo là định lý Gram-Schmidt trực giao hóa đối xứng lệch, định lý chéo hóa Williamson và phổ đối xứng lệch. Phần này được trích dẫn trong tài liệu số [1] và [2]. Ứng dụng các kết quả nghiên cứu về ma trận đối xứng lệch, tôi trình bày một số kết quả về chuẩn bất biến unita qua giá trị riêng đối xứng lệch. Nội dung phần này được trích dẫn trong tài liệu số [3] và [4].

Ngoài phần mở đầu, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo, luận văn gồm hai chương cụ thể như sau:

Chương 1. **Giới thiệu về không gian véc tơ đối xứng lệch**

Trong chương này tôi giới thiệu tổng quan về một số khái niệm cơ bản và ví dụ được trích dẫn trong cuốn sách "Symplectic geometry and quantum mechanics". Và các bài giảng "Introduction to symplectic mechanics: lectures I-II-III, lecture notes (2006)" của tác giả Maurice de Gosson.

Chương 2. **Ma trận đối xứng lệch và giá trị riêng**

Đây là phần chính của luận văn, trong chương này tôi giới thiệu về ma trận đối xứng lệch, một số tính chất cơ bản và ví dụ minh họa. Tiếp theo tôi trình bày một số tính chất của ma trận đối xứng lệch, định lý chéo hóa Williamson, phổ đối xứng lệch. Phần cuối của chương chúng tôi trình bày về chuẩn bất biến unita liên quan tới phổ đối xứng lệch.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 16 tháng 05 năm 2020

Tác giả

Triệu Việt Thịnh

Chương 1

Giới thiệu về không gian véc tơ đối xứng lệch

Trong toàn bộ luận văn, từ khóa *symplectic* tạm dịch là đối xứng lệch.

1.1 Một số khái niệm và ví dụ

1.1.1 Một số khái niệm

Định nghĩa 1.1.1. Cho E là một không gian véc tơ thực. Một dạng dạng đối xứng lệnh (*a symplectic form* hay *skew-product*) trên E là một ánh xạ $\omega : E \times E \to \mathbb{R}$ nếu thỏa mãn ba điều kiện sau.

- Tuyến tính đối với từng biến:

$$\omega\left(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2, z'\right) = \alpha_1 \omega\left(z_1, z'\right) + \alpha_2 \omega\left(z_2, z'\right)$$

$$\omega\left(z, \alpha_1 z_1' + \alpha_2 z_2'\right) = \alpha_1 \omega\left(z, z_1'\right) + \alpha_2 \omega\left(z, z_2'\right)$$

  với mọi $z, z', z_1, z_1', z_2, z_2' \in E$ và $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1', \alpha_2' \in \mathbb{R}$.

- Đối xứng lệch (nói cách khác là phản xứng):

$$\omega\left(z, z'\right) = -\omega\left(z', z\right) \text{ với mọi } z, z' \in E.$$